ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
& ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: *28 / 05/ 2012*

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ***

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου Σελ 253

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου Σελ 191

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου Σελ 258

Α4. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)\cdot(\overline{z}-1)+(z+1)\cdot(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+1=4 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot z\cdot\overline{z}=2 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=\sqrt{1} \Leftrightarrow \boxed{|z|=1}$$

Άρα ο γεωμ. τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Β2. Έχουμε $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$$|z_1-z_2|^2=\sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\cdot(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z}_1-z_1\cdot\overline{z}_2-\overline{z}_1\cdot z_2+z_2\cdot\overline{z}_2=2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2-z_1\cdot\overline{z}_2-\overline{z}_1\cdot z_2+|z_2|^2=2 \Leftrightarrow 1-z_1\cdot\overline{z}_2-\overline{z}_1\cdot z_2+1=2 \Leftrightarrow -z_1\cdot\overline{z}_2-\overline{z}_1\cdot z_2=0 \Leftrightarrow \boxed{z_1\cdot\overline{z}_2+\overline{z}_1\cdot z_2=0}$$

Έχουμε $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\cdot\overline{z}_1+z_1\cdot\overline{z}_2+\overline{z}_1\cdot z_2+z_2\cdot\overline{z}_2=|z_1|^2+z_1\cdot\overline{z}_2+\overline{z}_1\cdot z_2+|z_2|^2$

$=1+z_1\cdot\overline{z}_2+\overline{z}_1\cdot z_2+1=2$. Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

B3. $|w-5\bar{w}|=12 \Leftrightarrow |w-5\bar{w}|^2=12^2 \Leftrightarrow (w-5\bar{w})\cdot(\bar{w}-5w)=144 \Leftrightarrow w\bar{w}-5w^2-5\bar{w}^2+25w\bar{w}=144 \Leftrightarrow$

$26w\bar{w}-5\left(w^2+\bar{w}^2\right)=144$.

Έστω $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$,

- $w\bar{w}=x^2+y^2$
- $w^2+\bar{w}^2=x^2-y^2+2xyi+x^2-y^2-2xyi=2x^2-2y^2$

Επομένως η ισότητα γίνεται:

$26\left(x^2+y^2\right)-5\left(2x^2-2y^2\right)=144 \Leftrightarrow 26x^2+26y^2-10x^2+10y^2=144 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow$

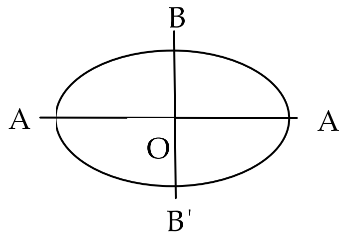
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ Άρα ο γεωμ. Τόπος των εικόνων του w είναι έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Οι εστίες βρίσκονται στον άξονα x'x (9 > 4).

$\alpha^2=9$, άρα $\alpha=3$, επομένως οι κορυφές είναι: $A(3,0)$ και $A'(-3,0)$

$\beta^2=4$, άρα $\beta=2$, επομένως οι κορυφές είναι: $B(0,2)$ και $B'(0,-2)$

$\gamma^2=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$,άρα $\gamma=\sqrt{5}$, επομένως οι εστίες είναι: $E\left(\sqrt{5},0\right)$ και $E'(-\sqrt{5},0)$



$|w|_{max}=\alpha=3$

$|w|_{min}=\beta=2$

B4. Ισχύει ότι: $\big||z|-|w|\big|\le|z-w|\le|z|+|w| \overset{B1}{\Leftrightarrow} \big|1-|w|\big|\le|z-w|\le 1+|w|$.

Είναι $|w|\le 3 \Leftrightarrow 1+|w|\le 4$. Άρα $|z-w|\le 4$ (μεταβατική ιδιότητα)

Επίσης $|w|\ge 2 \Leftrightarrow -|w|\le -2 \Leftrightarrow 1-|w|\le -1$ οπότε $|w|-1\ge 1$.

$\big|1-|w|\big|=|w|-1\ge 1$, άρα $|z-w|\ge 1$. Επομένως έχουμε τελικά: $1\le|z-w|\le 4$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η $f(x)=(x-1)\ln x-1,\ x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $A(0,+\infty)$ με:

$f'(x)=1\cdot\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι: $f'(1)=\ln 1+1-\frac{1}{1}=0$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $A(0,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε x>0.

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $A(0,+\infty)$.

Είναι: $0 < x < 1$, άρα $f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και $x > 1$, άρα $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ (f:συνεχής στο $(0,+\infty)$).

Έστω $\Delta_1 = (0,1]$ κ' $\Delta_2 = (1,+\infty)$, με $f(1) = (1-1)\ln 1 - 1 = -1$.

Η f συνεχής στο Δ1 και γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = [-1,+\infty) \text{ διότι:}$$

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = +\infty, \text{ αφού: } \begin{cases} \bullet \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = 0-1 = -1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

Η f συνεχής στο Δ2 και γνησίως αύξουσα άρα:

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-1,+\infty) \text{ διότι:}$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x - 1\right] = +\infty, \text{ αφού: } \begin{cases} \bullet \lim\limits_{x\to +\infty}(x-1) = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το: $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$.

Γ2. Η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$, είναι ισοδύναμη με την:

$\ln\left(x^{x-1}\right) = \ln\left(e^{2013}\right) \Leftrightarrow (x-1)\cdot \ln x = 2013 \cdot \ln e \Leftrightarrow (x-1)\cdot \ln x - 1 = 2013 - 1 \Leftrightarrow f(x) = 2012$.

Το $2012 \in f(\Delta_1) = [-1,+\infty)$, άρα η (1) έχει μια ρίζα x_1 μοναδική στο $\Delta_1 = (0,1]$, αφού η f είναι γν. φθίνουσα σε αυτό. Επειδή $x_1 \in (0,1]$ έχουμε $x_1 > 0$.

Επίσης το $2012 \in f(\Delta_2) = (-1,+\infty)$, άρα η (1) έχει μια ρίζα x_2 μοναδική στο $\Delta_2 = (1,+\infty)$, αφού η f είναι γν. αύξουσα σε αυτό. Επειδή $x_2 \in (1,+\infty)$, έχουμε $x_2 > 0$.

Άρα η (1) έχει ακριβώς δυο (2) θετικές ρίζες.

Γ3. Από το Γ2 ερώτημα έχουμε ότι: $f(x_1) = 2012$ και $f(x_2) = 2012$.

Η εξίσωση $f'(x) + f(x) = 2012$ είναι ισοδύναμη με την:

$$f'(x)\cdot e^x + f(x)\cdot e^x = 2012\cdot e^x \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot e^x\right)' - \left(2012\cdot e^x\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot e^x - 2012\cdot e^x\right)' = 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\left(f(x)-2012\right)\cdot e^{x}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[x_1,x_2]\subset(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$h(x_1)=\left(f(x_1)-2012\right)\cdot e^{x_1}=0\cdot e^{x_1}=0$$
$$h(x_2)=\left(f(x_2)-2012\right)\cdot e^{x_2}=0\cdot e^{x_2}=0$$

Άρα $h(x_1)=h(x_2)$

Από το θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0$.

Γ4. Έχουμε $g(x)=f(x)+1=(x-1)\cdot\ln x-1+1\Leftrightarrow \boxed{g(x)=(x-1)\cdot\ln x}$

$g(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Επί σης έχουμε $g(x)\geq 0$, για $x\in[1,e]$ οπότε:

$$E(\Omega)=\int_1^e (x-1)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\cdot\ln x\,dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot(\ln x)'\,dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\ln x\right]_1^e-\left[\left(\frac{x^2}{4}-x\right)\right]_1^e=\left(\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\cdot\ln e-0\right)-\left(\left(\frac{e^2}{4}-e\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right)=\frac{e^2-3}{4}\text{ τ.μ.}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Είναι $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\geq\frac{x-x^2}{e}$, άρα $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}\geq 0,\ x>0,\ (1)$

Θεωρώ $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e},\ x>0$. Είναι $g(1)=\int_1^{1} f(t)dt-\frac{1-1^2}{e}=0$, οπότε η (1) γίνεται:

$g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x>0$. Συνεπώς η g παρουσιάζει (ολικὸ) ελάχιστο στο $x_0=1$

Ακόμη $1\in(0,+\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ επειδή:

$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγισίμων $x^2-x+1, \int_1^{x} f(t)dt$ όπου

η $\int_1^{x} f(t)dt$ είναι παράγουσα της συνεχούς f και $\frac{x-x^2}{e}$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

Είναι για $x>0$: $g'(x)=\left(\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\right)'-\left(\frac{x-x^2}{e}\right)'=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$

Από θεώρημα (Fermat) θα ισχύει: $g'(1)=0 \Leftrightarrow f(1-1+1)(2-1)-\frac{1-2}{e} \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$

Η f είναι συνεχής και μη μηδενική στο $(0,+\infty)$, άρα διατηρεί το πρόσημό της σ'αυτό.

Όμως $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, άρα $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$, δηλαδή $|f(x)|=-f(x)$, για $x>0$

Επομένως η $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)|f(x)|$ γίνεται $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x)$, (2)

Για $x>0$ θεωρώ $\varphi(x)=\ln x - x, x>0$. Έχουμε $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}, x>0$

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ και $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}>0 \Leftrightarrow x<1$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα

στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Έτσι για $0<x<1$ έχουμε $\varphi(x)<\varphi(1)=-1<0$

και για $x>1$ έχουμε $\varphi(x)<\varphi(1)=-1<0$. Οπότε $\varphi(x)\le\varphi(1)=-1<0$, άρα $\ln x - x<0$, για $x>0$

Επομένως από $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x)$, έχουμε $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e>0$

Έτσι $f(x)=\dfrac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e}$ και επομένως f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ αφού είναι πηλίκο

παραγωγισίμων συναρτήσεων και συγκεκριμένα: $\ln x - x$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,

$\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως αρχική της συνεχούς στο $(0,+\infty)$ συνάρτησης:

$\frac{\ln t - t}{f(t)}$. Παραγωγίζουμε την (2) και έχουμε $(\ln x - x)' = \left[\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x)\right]' \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x}-1=\frac{\ln x - x}{f(x)}f(x)+\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x}-1=\ln x - x+\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f'(x), \quad (3)$$

Από (2) $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e = \frac{\ln x - x}{f(x)}$,(4), οπότε η (3) λόγω της (4) γίνεται:

$$\frac{1}{x}-1=\ln x - x+\frac{\ln x - x}{f(x)}f'(x) \overset{\ln x - x<0}{\Leftrightarrow} \frac{(\ln x - x)'}{\ln x - x}=1+\frac{f'(x)}{f(x)}$$, άρα $(\ln|\ln x - x|)' = x' + (\ln|f(x)|)'$

Οπότε $(\ln|\ln x - x| - \ln|f(x)|)' = x' \Leftrightarrow \left(\ln\frac{|\ln x - x|}{|f(x)|}\right)' = x'$, επομένως $\ln\frac{|\ln x - x|}{|f(x)|} = x + c, c\in\mathbb{R}$ που για $x=1$, δίνει $\ln\frac{1}{\frac{1}{e}}=1+c\Leftrightarrow c=0$. Συνεπώς $\ln\frac{|\ln x-x|}{|f(x)|}=x\Leftrightarrow\frac{|\ln x-x|}{|f(x)|}=e^x\Leftrightarrow\frac{x-\ln x}{-f(x)}=e^x\Leftrightarrow$

$f(x)=(\ln x-x)e^{-x},\ x>0$

Δ2. Για το $\lim_{x\to0^+}\left[(f(x))^2\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]$ θεωρώ $\frac{1}{f(x)}=u$. Είναι $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[(\ln x-x)e^{-x}\right]=-\infty$

αφού $\lim_{x\to0^+}(\ln x-x)=-\infty$ και $\lim_{x\to0^+}e^{-x}=1>0$, οπότε $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{f(x)}=0$, επομένως $u\to0$ με $u<0$

Άρα $\lim_{x\to0^+}\left[(f(x))^2\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]=\lim_{u\to0^-}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to0^-}\left(\frac{\eta\mu u-u}{u^2}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to0^-}\frac{(\eta\mu u-u)'}{(u^2)'}=$

$\lim_{u\to0^-}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}\right)=\frac{1}{2}\lim_{u\to0^-}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}\right)=\frac{1}{2}\cdot0=0$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

ως αρχική της f με $F'(x)=\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x),\ x>0$. Η F' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

αφού f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F''(x)=f'(x)>0$, διότι:

από (3) : $\frac{1}{x}-1=\ln x-x+\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f'(x)$ είναι $\frac{1}{x}>0,\ -\ln x+x-1\ge0$ (από υπόθεση) και

$\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e>0$ για $x>0$. Επομένως η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Για $x>0$: $x<2x<3x$. Η F είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$ αφού

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Συνεπώς από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1\in(x,2x)$ και

$\xi_2\in(2x,3x)$, τέτοια, ώστε:

$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\frac{F(2x)-F(x)}{x}$ και $F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$

Είναι F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, άρα F' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $\xi_1<2x<\xi_2$, επομένως $F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{x} < \frac{F(3x)-F(2x)}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(2x)-F(x) < F(3x)-F(2x) \Leftrightarrow$

$F(x)+F(3x) > 2F(2x)$ για κάθε $x>0$.

Δ4. Θεωρώ $K(x) = 2F(x)-F(\beta)-F(3\beta),\ x \in [\beta, 2\beta]$

Είναι K συνεχής στο $[\beta, 2\beta] \subset (0, +\infty)$ και: $K(\beta) = 2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta) = F(\beta)-F(3\beta) > 0$, αφού:

$F'(x) = f(x) < 0$, άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και για $\beta > 0$, $\beta < 3\beta$,

ακόμη $K(2\beta) = 2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta) < 0$, όπως προκύπτει από Δ_3 για $x = \beta$.

Άρα $K(\beta)\cdot K(2\beta) < 0$

Έτσι από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$K(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta)+F(3\beta)$. Όμως $K'(x) = \left(2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)\right)' = 2F'(x) = 2f(x) < 0$,

Δηλ. K γνησίως φθίνουσα στο $[\beta, 2\beta]$, β>0 , άρα ξ:μοναδικό.